数理解析研究所講究録
884巻 1994年 14-23

Shintani Functions and Automorphic L-functions

京産大・理 村瀬 篤 (Atsushi Murase)
広島大・理 菅野孝史 (Takashi Sugano)

§0. Introduction

G を $\mathbb{Q}$ 上定義された reductive な代数群，H をその部分群とし，$G_{\mathbb{A}}$，$H_{\mathbb{A}}$ を各々のアデール化とする．G および H 上の cusp forms F, f ($F: G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}} \to \mathbb{C}$, $f: H_{\mathbb{Q}}\backslash H_{\mathbb{A}} \to \mathbb{C}$) に対し，積分

$$(0.1) \qquad W_{f,F}(g) = \int_{H_{\mathbb{Q}}\backslash H_{\mathbb{A}}} f(h)\, F(hg)\, dh$$

が収束するとき，この $G_{\mathbb{A}}$ 上の関数 $W_{f,F}$ を研究すること，特にその保型L-関数の理論への応用を考えることが，このノートの目的である．このような対象はすでに，以下にみるようにいくつかの場合に研究されてきた。

例1　Whittaker function

G を quasi split, N を G の Borel 部分群の unipotent radical とする。$H = N$, $f = N$ の non-degenerate character とするとき, $W_{f,F}$ は F に付随する global Whittaker function であり, 以下のことが知られている：

(A) F が Hecke eigenform ならば $W_{f,F}$ は decomposable, すなわち local Whittaker functions W_v (v は $\mathbb{Q}$ の素点) の積でかける。

(B) W_v の explicit formula (Shintani, S. Kato, Casselmann-Shalika)。

(C) 保型 L-関数の Rankin-Selberg method への応用 (local factor の explicit な計算)。

<u>例 2</u> spherical function

$G = H$, $F = f$ のとき, $W_{f,F}$ は spherical function であり, (A)～(C) に対応する事実が知られている。

この二つの場合, F は任意だが, f としては特別なものに限定していることに注意する。

問題　任意の (f, F) に対し，(A)〜(C) がうまくいくような pair (G, H) をみつけよ。

候補　このノートでは，次の4つの pair の系列に対し (A)〜(C)（の一部）が成立することを示す。

(☆)

case	(GL)	(O)	(U)	(Sp)
G	$GL(m)$	$O(m)$	$U(m)$	$Sp(m)$
H	$GL(m-1)$	$O(m-1)$	$U(m-1)$	G^J_{m-1}

ここに，G^J_{m-1} は degree $m-1$ の Jacobi 群，すなわち $Sp(m-1)$ と Heisenberg 群との半直積である。

1970年代末に，Shintani（[Sh]）は，(Sp) の場合に，$W_{f,F}$ を導入し，(A)〜(C) が成立することを予想した。このノートでは，☆ の系列のものに対しては，$W_{f,F}$ を Shintani function と呼ぶことにする。

§1. Local Shintani functions

(G, H) をリスト (☆) の中の pair とする。この節では $\mathbb{Q}$ の有限素点 p を fix し，$G_p = G_{\mathbb{Q}_p}$ などとかく。

G_p の Hecke 環を，$\mathcal{H}_{G_p} = \{ \Phi : G_p \to \mathbb{C} \mid \Phi$ は両側 $G_{\mathbb{Z}_p}$-不変で compactly supported$\}$ とする。同様に $\mathcal{H}_{H_p}$ も定義する．以下簡単のため，p は "good" prime と仮定する．このとき，$\mathcal{H}_{G_p}, \mathcal{H}_{H_p}$ は $\mathbb{C}$ 上の多項式環に同型である（Satake）．

<u>定義</u>　$\lambda_p \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{H_p}, \mathbb{C})$，$\Lambda_p \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{G_p}, \mathbb{C})$ に対し

$$Sh(\lambda_p, \Lambda_p) \underset{\mathrm{def}}{=} \{ W : H_{\mathbb{Z}_p} \backslash G_p / G_{\mathbb{Z}_p} \to \mathbb{C} \mid \varphi * W * \Phi = \lambda_p(\varphi) \Lambda_p(\Phi) \cdot W \quad \text{for } {}^\forall \varphi \in \mathcal{H}_{H_p}, {}^\forall \Phi \in \mathcal{H}_{G_p} \}$$

ただし，

$$\varphi * W * \Phi (g) = \int_{H_p} dx \int_{G_p} dy \ \varphi(x) W(x^{-1} g y) \Phi(y).$$

$Sh(\lambda_p, \Lambda_p)$ の元を (λ_p, Λ_p) に付随する (local) Shintani function という．

<u>予想 1</u>　任意の (λ_p, Λ_p) に対し

$$\dim_{\mathbb{C}} Sh(\lambda_p, \Lambda_p) = 1.$$

定理 2　(i) (Sp) の場合　$\dim Sh(\lambda_p, \Lambda_p) \leqq 1$

(ii) (GL) の場合，予想 1 は正しい．

(cf. [MS 1], [MS 3])

注意

(i) 予想 1 は (Sp) の場合に Shintani により初めて提唱された．

(ii) §0 の状況で，f, F ともに Hecke eigenform ならば，$W_{f,F}$ の G_p への制限は $Sh(\lambda_p, \Lambda_p)$ に属する（λ_p, Λ_p は f, F の固有値で決まる）．従って (A) は予想 1 から得られる．（実際は $\dim \leq 1$ だけでよい。）

(iii) (O), (U) の場合は，m が小さい時確められているが，一般には未解決である。

§2. Rankin-Selberg convolution (cf. [MS2], [MS3])

この節では，Shintani function の保型 L-関数への応用を考える。(☆) の各系列に対し，G を部分群として含む古典群 H_1 を次のように定める。

	(GL)	(O)	(U)	(Sp)
H_1	$GL(m+1)$	$O(m+1)$	$U(m+1)$	G_m^J

H_1 の parabolic subgroup P_1 で，その Levi component が $GL(1)^d \times H$ $\left(d = \begin{cases} 1 & (GL) \\ 2 & \text{その他} \end{cases} \right)$ に同型になるようなものが存在する。よって H 上の cusp form f に付随する d 変数の $H_{1,A}$ 上の実解析的 Eisenstein 級数を以下のように構成できる。（簡単のため $d=1$ とする。） P_1 の unipotent radical を N_1，$K_{1,A}$ を $H_{1,A}$ の適当な極大コンパクト部分群とすると，$H_{1,A}$ の任意の元 h_1 は $h_1 = n_1(\alpha(h_1) \times \beta(h_1))k_1$ $(n_1 \in N_{1,A},\ \alpha(h_1) \in A^\times,\ \beta(h_1) \in H_A,\ k_1 \in K_{1,A})$ と岩澤分解される。$s \in \mathbb{C}$ に対し

$$\phi_f(h_1 ; s) = |\alpha(h_1)|_A^s\, f(\beta(h_1))$$

とおく。ここに $|\ |_A$ は $A^\times$ のイデールノルムである。級数

$$E_f(h_1 : s) = \sum_{\gamma \in P_{1,Q} \backslash H_{1,Q}} \phi_f(\gamma h_1 : s)$$

は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ ならば絶対収束する。Eisenstein 級数 $E_f(h_1 : s)$ は，f が Hecke eigenform ならば

全s-平面へ解析接続され，関数等式をもつ（ただし，このことは（S_p）の場合にはまだ証明されていない）。

以下，f，F を H，G 上の cusp form で，Hecke eigenform とする。以下 f，F に付随する Rankin-Selberg convolution を定義するが，（GL）の場合は多少修正する必要があるのでここでは触れない（[MS 3] を参照して下さい）。

定義

$$Z_{f,F}(s) = \int_{G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}}} F(g)\, E_f(g:s)\, dg \tag{2.1}$$

積分（2.1）は，$\mathrm{Re}\, s \gg 0$ のとき絶対収束し，（（S_p）を除いて）全s-平面へ有理型関数として解析接続され関数等式をもつ。Shintani function との関係は次で与えられる。

命題3（Basic identy）

$$Z_{f,F}(s) = \int_{H_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}} W_{f,F}(\beta(g)^{-1}g)\, |\alpha(g)|_{\mathbb{A}}^{s}\, dg$$

定理４　$p<\infty$ を good prime，$W_p \in Sh(\lambda_p, \Lambda_p)$ とする。このとき

$$\int_{H_p \backslash G_p} W_p(\beta(g)^{-1}g)\,|\alpha(g)|_p^s\,dg$$

$$= \frac{L_p(\Lambda_p : s')}{\zeta_p(s'')\,L_p(\lambda_p : s'+\frac{1}{2})} \times W_p(1).$$

ここで $|\ |_p$ は p-進付値，$L_p(\lambda_p ; s)$，$L_p(\Lambda_p : s)$ は "standard" L-factor，$s' = s+a'$，$s'' = s+a''$（$a', a'' \in \mathbb{R}$）で a', a'' は (G, H) のみに依存する。

命題３と定理４をあわせて次を得る。

系５　すべての p が good ならば

$$Z_{f,F}(s) = \frac{L(F : s')}{\zeta(s'')\,L(f : s'+\frac{1}{2})} \times W_{f,F}(1)$$

ただし，$L(F : s)$，$L(f : s)$ は F, f の standard L-関数。

注意　定理４は $p=\infty$ のときも類似のことが成り立つ。

系5は，もし $W_{f,F}(1) \neq 0$ （"initial condition"）ならば，$L(F;s)$ の解析的性質（解析接続，関数等式，極の location 等）が，$L(f;s)$ のそれらに，原理的には帰着されることを示している（(S_p) をのぞく）。

特に，G が定値偶2次形式 S の直交群で，S が maximal ならば，initial condition を外すことができ，上の方法が働く。 これより，G 上の保型形式 F の standard L-関数 $L(F;s)$ の"完全な"関数等式および極の location を決定することができる（[MS2]，[MS4]）。

紙数の関係で explicit formula には触れることができなかったが，これについては，いくつかの部分的結果（[Mu]，[MS3]）と（GL）の場合の予想（[MS3]）がある他は，未解決である。

Reference

[MS 1] Murase, A., Sugano, T.: Whittaker functions on the symplectic group of Fourier-Jacobi type. Compositio Math. **79**, 321-349 (1991)

[MS 2] Murase, A., Sugano, T.: Shintani function and its application to automorphic L-functions for classical groups I. The case of orthogonal groups, to appear in Math. Ann.

[MS 3] Murase, A., Sugano, T.: Shintani functions and automorphic L-functions for GL(n). preprint

[MS 4] Murase, A., Sugano, T.: On standard L-functions attached to automorphic forms on definite orthogonal groups. preprint

[Mu] Murase, A.: On an explicit formula for Whittaker-Shintani functions on Sp(2), Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **61**, 153-162 (1991)

[Sh] Shintani, T.: Unpublished notes.